

# IDENTIFICACIÓN DE INDICADORES DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA SOBRE FUNCIONES MEDIANTE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO<sup>22</sup>

Espinoza, G<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>P. Universidad Católica de Valparaíso;  
gonzalo.espinoza.v@gmail.com

## Resumen

*El Análisis Didáctico (AD) tiene como propósito establecer los significados de los conceptos y la intencionalidad de la matemática escolar. En este escrito se muestra al Análisis Didáctico (AD) como una herramienta en la identificación del conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) sobre el concepto de función. Particularmente el centro está en la identificación de descriptores para el conocimiento del tema (KoT) que emergen del análisis del contenido en textos escolares y el programa de estudio de 8vo básico.*

**Palabras clave:** *análisis didáctico, conocimiento especializado, concepto de función, conocimiento matemático.*

## EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

El conocimiento de los profesores es una línea de investigación que ha ido creciendo sostenidamente durante las últimas décadas. En la Universidad de Huelva, España, el grupo SIDM<sup>i</sup> ha reflexionado sobre este conocimiento y ha propuesto el marco referencial “*Mathematic teacher’s specialized knowledge*” (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013) como refinamiento al modelo de Ball, Thames y Phelps (2008) debido a las dificultades en la delimitación entre los subdominios y su caracterización (Carrillo, Contreras y Flores, 2013; Carrillo et al., 2013; Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

El MTSK es un modelo teórico para estudiar, de forma analítica, el conocimiento del profesor y, a su vez, es considerado como una herramienta metodológica para analizar las prácticas pedagógicas en base a sus categorías (Flores, Escudero & Aguilar, 2013), ya que tiene por objetivo caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas como especialista en la enseñanza de la matemática. En el MTSK se tienen los dominios relativos al conocimiento matemático (MK) y al conocimiento didáctico (PCK) con tres subdominios cada uno y sus categorías:

- Conocimiento de los Temas (KoT). Conoce los contenidos y sus significados de manera fundamentada. Integra el contenido que deben aprender los alumnos y una profundización mayor a éste. Las categorías del KoT son: Fenomenología, Propiedades y sus Fundamentos, Registros de representación, Definiciones y Procedimientos.
- Conocimiento de la estructura matemática (KSM): Conexiones de complejización, Conexiones de simplificación, Conexiones de contenidos transversales y Conexiones auxiliares.

---

<sup>22</sup>a Trabajo realizado con el financiamiento de CONICYT, Beca Doctorado Nacional

- Conocimiento de la práctica matemática (KPM): Prácticas ligadas a la matemática en general, Prácticas ligadas a una temática en matemática.
- Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM): Formas de aprendizaje, Fortalezas y Dificultades asociadas al aprendizaje, Formas interacción de los alumnos con el Contenido matemático y Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas.
- Conocimiento de la enseñanza de la Matemática (KMT): Teorías personales o institucionales de enseñanza, Recursos materiales y virtuales y Actividades, Tareas, Ejemplos, Ayudas.
- Conocimiento de los Estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): Contenidos matemáticos requeridos a enseñar, Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, y Secuenciación de diversos temas.

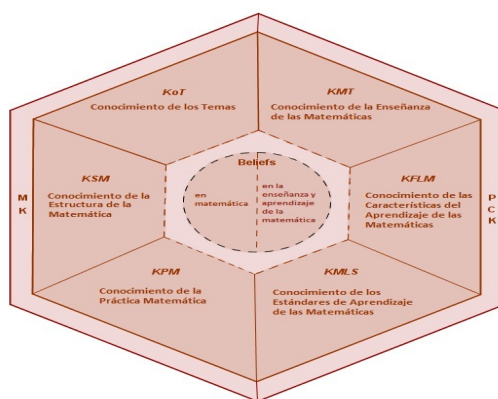


Figura 1. Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013)

### El análisis didáctico como herramienta metodológica

De acuerdo con Rico (2013), el Análisis Didáctico (AD) es un método de investigación propio de la Didáctica de la Matemática, cuyo sustento está en la matemática, su historia y también en la filosofía del conocimiento y de la educación. El AD es considerado una herramienta para investigadores y para docentes ya que sus finalidades “radican en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos” (Rico, p. 19), entregando al profesor medios para esta organización y al investigador una referencia sobre los conocimientos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El objetivo del AD es establecer los significados de los conceptos involucrados en la enseñanza y su intencionalidad educativa en el discurso de la matemática escolar, por tanto parte de las fuentes de información serán los documentos oficiales que regulen y organicen este discurso.

El AD se estructura en un ciclo de 5 etapas, con 3 componentes cada una dando lugar a una síntesis correspondiente. Las etapas y sus componentes son las siguientes:

- **Análisis conceptual:** Conceptos básicos, Aproximación histórica, Génesis epistemológica; Síntesis **Conceptos y red de significados que articulan un tema.**
- **Análisis del contenido:** Estructura y análisis formal, Sistemas de representaciones, Análisis fenomenológico; Síntesis **Focos prioritarios.**
- **Análisis cognitivo:** Expectativas de aprendizaje, Limitaciones en el aprendizaje, Demandas cognitivas; Síntesis **Organización de los aprendizajes.**
- **Análisis de instrucción:** Funciones y secuencias de las tareas, Materiales y recursos, Gestión de aula; Síntesis **Diseño de la unidad didáctica.**

- **Análisis evaluativo:** Criterios e instrumentos de evaluación, Rendimiento, resultados e interpretación, Toma de decisiones; Síntesis **Revisión del proceso.**

El AD entrega un marco referencial teórico y práctico sobre la organización de la matemática escolar, cuyos componentes se corresponderán con los elementos del conocimiento del profesor.

En este trabajo mostramos cómo los resultados del análisis del contenido han permitido establecer indicadores para el KoT en el caso del concepto de función. Gallardo y González (2006), Rojas, Flores y Carrillo (2015) y Rojas, Flores y Ramos (2013) muestran cómo el AD permite esta identificación. A continuación un extracto de la relación identificada por Rojas et al. (2015) entre los componentes del AD y los dominios del MTSK.

Tabla 1. Relación entre los componentes del análisis de contenido y los dominios del conocimiento especializado del profesor de matemática

Análisis de contenido	Dominios de conocimiento				PCK	
	MK					
	KoT	KSM	KPM	KMT	KFLM	KMLS
Análisis conceptual	X	X	X	X	X	X
Análisis fenomenológico	X	X		X		
Sistemas de representación	X	X		X		

El análisis realizado consultó tres fuentes de información asociadas a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función. Por una parte encontramos los documentos oficiales que regulan el plan de estudio, esto es el programa de estudio de octavo básico (MINEDUC, 2014) según el decreto exento N° 169/2014, donde se inicia el estudio del concepto de función y se posiciona como parte de la segunda unidad del primer semestre escolar. Por otro lado recurrimos al texto del estudiante (Bórquez, Darrigrandi, y Zañartu, 2012), y a la guía para el docente (Donoso y Jiménez, 2012) que se ponen a disposición por parte del Ministerio de Educación como materialización de la propuesta oficial que aparece en el programa de estudio. Finalmente se revisan textos de matemática utilizados en los cursos de cálculo en la educación superior (e.g. Apostol, 1967; Spivak, 1978). De esta revisión se obtiene una estructura conceptual, formas de representación y la fenomenología asociada al concepto de función. Como síntesis de este análisis se obtienen distintas concepciones sobre el concepto de función.

### Resultados del análisis de contenido sobre el concepto de función

Cada significado dado al concepto de función tiene asociado un conjunto de elementos que dan cuerpo a esta concepción. Concepciones, conceptos, representaciones, fenomenología y procedimientos son las categorías en que se relacionan el análisis de contenido y el KoT del MTSK. Las concepciones encontradas son: como correspondencia o vínculo entre elementos de dos conjuntos establece la asignación de un elemento de un conjunto con otro elemento de otro conjunto mediante una “ley”; como relación binaria o conjunto de pares ordenados y subconjunto del producto cruz entre dos conjuntos se muestra a la función relación que cumple una determinada condición; como un proceso de entrada-salida mediante un cambio del objeto de entrada por uno de otra naturaleza o como una transformación de él en otro de la misma especie; como triada  $(f, X, Y)$  identificando el dominio y recorrido de la función así como la expresión o ley que la define.

Los conceptos involucrados: ley o regla para la asignación, relación binaria, conjuntos, producto cruz o cartesiano entre dos conjuntos, ecuación funcional, valor funcional, expresión algebraica, dominio, recorrido, pre imagen, imagen, variable dependiente e independiente, par ordenado, punto

en el plano, gráfico, proporcionalidad. Cada uno de estos conceptos forma parte de la definición, representación u operación con funciones.

Las representaciones: la función se puede representar por medio de tablas de valores, lenguaje natural, diagrama sagital, lenguaje algebraico, conjunto de pares ordenados, conjunto de puntos en el plano, con software de procesador gráfico o con material concreto.

La fenomenología: corresponde a situaciones cotidianas de variación proporcional, relaciones numéricas cotidianas, ampliación o reducción de figuras geométricas mediante imagen homotética, situaciones de cambio lineal o situaciones de cambio afín. La fenomenología obedece principalmente a la proporcionalidad.

Los procedimientos utilizados: cálculo de imágenes y pre imágenes mediante valorización de expresiones o resolución de ecuaciones, identificación de dominio y recorrido, ubicación de puntos en el plano, cálculo de constantes de proporcionalidad, cálculo de pendiente de la recta, identificación de la posición de la recta respecto a los ejes.

La descripción de los componentes anteriores establece la forma en que los conceptos se relacionan para dar lugar a la estructura conceptual y a la comprensión del concepto de manera que lo emergido del análisis corresponde a un conocimiento esperado-requerido por el profesor.

### **Indicadores para KoT**

Lo anterior posibilita la identificación de ciertos descriptores de conocimiento del profesor de matemática que pretende enseñar el concepto de función. Se debe aclarar en este punto que la lista que sigue no es exhaustiva y corresponde a una etapa inicial de esta investigación. Se sabe que los dominios del MTSK están inter-relacionados (Carrillo et al., 2013) por lo tanto el análisis de los otros dominios permitirá determinar más indicadores en este dominio, así también la conexión de las etapas del ciclo del AD con el MTSK aporta más información sobre estas relaciones. Se describen a continuación los indicadores para las categorías del KoT según los resultados del análisis. Fenomenología: Conoce distintos contextos donde aparece la función como variación proporcional o cambio lineal. Conoce los ámbitos numéricos que son factibles trabajar en el nivel en que enseña. Conoce distintos significados de la función como correspondencia, como proceso de entrada-salida o de transformación. Propiedades y sus Fundamentos: Conoce la propiedad de linealidad de una función. Conoce el concepto de constatación de proporcionalidad y cómo ella se utiliza en la determinación de la representación de la función. Conoce la posición relativa de una recta en el plano con respecto a los ejes del sistema.

Registros de representación: Conoce las representaciones de funciones en tablas de valores y su construcción, en lenguaje natural como un enunciado, en lenguaje algebraico como una expresión algebraica  $y=f(x)$  o ecuación funcional, en diagrama sagital, en conjunto de pares ordenados, en el plano cartesiano como conjunto de puntos, en material concreto como *geoplano* o con software educativo. Conoce la representación más adecuada según la situación planteada. Reconoce las diferencias entre la representación de una relación funcional de una no funcional.

Definiciones y Procedimientos: Conoce la definición del concepto de función. Establece criterios para determinar si un ejemplo o situación corresponde a una función. Domina la resolución de ecuaciones como herramienta en la determinación de imágenes y pre imágenes. Domina la evaluación de expresiones algebraicas. Domina la operatoria con números racionales. Domina la ubicación de puntos en el plano.

### **Comentarios finales**

Como se ha mostrado, el AD resulta ser una herramienta útil para la identificación del conocimiento especializado del profesor sobre un tema particular, por tanto se transforma en una herramienta para el investigador y en una metodología de investigación. La relación entre el AD y el MTSK potencia la identificación de referencias para el conocimiento del profesor y permite pre visualizar sus usos en la formación inicial y continua de profesores, o en el establecimiento de referencias teóricas sobre el conocimiento deseado-requerido en los profesores.

## Referencias

- Apostol, T., (1967). *Cálculus Volumen I*. México: Reverté.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bórquez, E., Darrigrandi, F., & Zañartu, M. (2012). *Matemática 8º Educación Básica: texto para el estudiante*. Santiago: Santillana.
- Carrillo, J., Contreras, L.C. & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina & I. Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*, (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.
- Donoso, M., Jiménez, L. (2012). *Guía didáctica del docente para el texto Matemática 8º Educación Básica*. Santiago: Santillana.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2055-3064). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.
- Gallardo, J., & González, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En M. P. Bolea, M. Moreno & M. González (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 57-78). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- MINEDUC (2014). Ministerio de Educación Chile. Programa de estudio de matemática - Octavo Básico. Decreto Exento 169/2014. disponible en [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983_programa.pdf)
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (33), 11-27.
- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema*, 29(51), 143-166.
- Rojas, N., Flores, P., & Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiañez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, Formación de profesores e Innovación curricular* (pp. 191-210). Granada: Comares, S. L.
- Spivak, M. (1978). *Cálculo Infinitesimal*. Barcelona: Reverté.

<sup>i</sup> Seminario de Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Huelva, España.